École Polytechnique Universitaire de Lille

TD2 Lois de Comportement (Master M1) - CORRIGÉ

Enseignants : G. MOMPEAN, E. CALZAVARINI et R. MARTINS

Polytech'Lille - Département de Mécanique - 2014/2015

I) On part d'une transformation de coordonnées consistant en une translation et une rotation :

$$\mathbf{x}^*(\mathbf{A},t) = \mathbf{c}(t) + \mathbf{Q}(t)\mathbf{x}(\mathbf{A},t)$$

où $\mathbf{x}(\mathbf{A},t)$ est la position d'un point materiel à l'instant t. La vitesse est définie par :

$$\mathbf{u}^*(\mathbf{A},t) = \frac{d\mathbf{x}^*(\mathbf{A},t)}{dt^*} = \frac{d\mathbf{x}^*(\mathbf{A},t)}{dt} = \frac{d\mathbf{c}(t)}{dt} + \frac{d\mathbf{Q}(t)}{dt}\mathbf{x}(\mathbf{A},t) + \mathbf{Q}(t)\mathbf{u}(\mathbf{A},t)$$

ou, en notation indicée

$$u_i^* = \dot{c}_i + \dot{Q}_{ik}x_k + Q_{ik}u_k$$

En dérivant la relation ci-dessus, on obtient :

$$\frac{\partial u_i^*}{\partial x_j^*} = \dot{Q}_{ik}\frac{\partial x_k}{\partial x_j^*} + Q_{ik}\frac{\partial u_k}{\partial x_l}\frac{\partial x_l}{\partial x_j^*} \tag{1}$$

On sait que $x_i^* = c_i + Q_{ij}x_j$ et $x_k = Q_{jk}(x_j^* - c_j)$, d'où on a :

$$\frac{\partial x_j^*}{\partial x_k} = Q_{jk} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial x_k}{\partial x_j^*} = Q_{jk}$$

En remplaçant ceci dans l'équation (1), on obtient :

$$\frac{\partial u_i^*}{\partial x_j^*} = \dot{Q}_{ik}Q_{jk} + Q_{ik}\frac{\partial u_k}{\partial x_l}Q_{jl} \tag{2}$$

L'objectivité du tenseur $\mathbf{D}$ des taux de déformation se vérifie alors en remplaçant l'équation (2) dans l'expression donnée :

$$D_{ij}^* = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i^*}{\partial x_j^*} + \frac{\partial u_j^*}{\partial x_i^*}\right) = \frac{1}{2}\left(\dot{Q}_{ik}Q_{jk} + Q_{ik}\frac{\partial u_k}{\partial x_l}Q_{jl} + \dot{Q}_{jk}Q_{ik} + Q_{jk}\frac{\partial u_k}{\partial x_l}Q_{il}\right)$$

En réorganisant les termes et en permutant les indices k et l dans le dernier terme, on écrit successivement :

$$2D_{ij}^* = (\dot{Q}_{ik}Q_{jk} + Q_{ik}\dot{Q}_{jk}) + Q_{ik}\frac{\partial u_k}{\partial x_l}Q_{jl} + Q_{jl}\frac{\partial u_l}{\partial x_k}Q_{ik} = \frac{d}{dt}(Q_{ik}Q_{jk}) + Q_{ik}\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k}\right)Q_{jl}$$

Comme $\mathbf{Q}$ est orthogonal (i.e. $\mathbf{Q}\mathbf{Q}^T = \mathbf{I}$), il vient que

$$2D_{ij}^* = Q_{ik}\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k}\right)Q_{jl} = 2Q_{ik}D_{kl}Q_{jl}$$

et on conclut que le tenseur $\mathbf{D}$ des taux de déformation est objectif car on a bien la relation :

$$\mathbf{D}^* = \mathbf{Q}\ \mathbf{D}\ \mathbf{Q}^T$$

II) Le tenseur des taux de rotation $\mathbf{W}$ n'est pas objectif. En procédant de manière analogue, on a que :

$$\begin{aligned}
2W^*_{ij} &= \left(\frac{\partial u^*_i}{\partial x^*_j} - \frac{\partial u^*_j}{\partial x^*_i}\right) \\
&= \dot{Q}_{ik}Q_{jk} + Q_{ik}\frac{\partial u_k}{\partial x_l}Q_{jl} - \dot{Q}_{jk}Q_{ik} - Q_{jk}\frac{\partial u_k}{\partial x_l}Q_{il} \\
&= (\dot{Q}_{ik}Q_{jk} - \dot{Q}_{jk}Q_{ik}) + Q_{ik}\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l} - \frac{\partial u_l}{\partial x_k}\right)Q_{jl}
\end{aligned}$$

En utilisant l'orthogonalité de $\mathbf{Q}$, on peut écrire que :

$$\dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^T + \mathbf{Q}\dot{\mathbf{Q}}^T = 0$$

soit en notation indicielle :

$$-Q_{ik}\dot{Q}_{jk} = \dot{Q}_{ik}Q_{jk}$$

En substituant cette dernière expression dans la relation $2W^*_{ij}$, il vient que :

$$W^*_{ij} = \dot{Q}_{ik}Q_{jk} + Q_{ik}W_{kl}Q_{jl}$$

soit en notation matricielle,

$$\mathbf{W}^* = \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^T + \mathbf{Q}\mathbf{W}\mathbf{Q}^T$$

Ceci montre que $\mathbf{W}$ n'est pas un tenseur objectif, car $\mathbf{W}^* \neq \mathbf{Q}\mathbf{W}\mathbf{Q}^T$. Le tenseur $\dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^T$ est antisymétrique et rend compte de la vitesse de rotation de $\mathcal{O}^*$ par rapport à $\mathcal{O}$.

III) Si $\dfrac{D\mathbf{T}}{Dt}$ était objectif, on pourrait écrire que :

$$\frac{D\mathbf{T}^*}{Dt} = \mathbf{Q}\frac{D\mathbf{T}}{Dt}\mathbf{Q}^T$$

En développant la dérivée matérielle et du fait que le tenseur $\mathbf{T}$ est objectif, on obtient successivement :

$$\begin{aligned}
\frac{D\mathbf{T}^*}{Dt} &= \frac{\partial \mathbf{T}^*}{\partial t} + u_i\frac{\partial \mathbf{T}^*}{\partial x_i} \\
&= \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{Q}\mathbf{T}\mathbf{Q}^T) + u_i\frac{\partial}{\partial x_i}(\mathbf{Q}\mathbf{T}\mathbf{Q}^T) \\
&= \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t}\mathbf{T}\mathbf{Q}^T + \mathbf{Q}\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial t}\mathbf{Q}^T + \mathbf{Q}\mathbf{T}\frac{\partial \mathbf{Q}^T}{\partial t} + u_i\frac{\partial}{\partial x_i}(\mathbf{Q}\mathbf{T}\mathbf{Q}^T)
\end{aligned}$$

Comme le tenseur Q est uniquement fonction du temps, on a que :

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\mathbf{Q}\mathbf{T}\mathbf{Q}^T) = \mathbf{Q}\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial x_i}\mathbf{Q}^T$$

et donc, on peut finalement écrire :

$$\frac{D\mathbf{T}^*}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t}\mathbf{T}\mathbf{Q}^T + \mathbf{Q}\mathbf{T}\frac{\partial \mathbf{Q}^T}{\partial t} + \mathbf{Q}\frac{D\mathbf{T}}{Dt}\mathbf{Q}^T$$

La dérivée matérielle n'est pas objective vu que les 2 premiers termes de la relation précédente sont généralement non nuls.

IV) On part d'une transformation de coordonnées consistant en une translation et une rotation :

$$\mathbf{x}^*(\mathbf{A}, t) = \mathbf{c}(t) + \mathbf{Q}(t)\mathbf{x}(\mathbf{A}, t)$$

où $\mathbf{x}(\mathbf{A}, t)$ est la position d'un point materiel à l'instant t. La vitesse est définie par :

$$\mathbf{u}^*(\mathbf{A}, t) = \frac{d\mathbf{x}^*(\mathbf{A}, t)}{dt^*} = \frac{d\mathbf{x}^*(\mathbf{A}, t)}{dt} = \frac{d\mathbf{c}(t)}{dt} + \frac{d\mathbf{Q}(t)}{dt}\mathbf{x}(\mathbf{A}, t) + \mathbf{Q}(t)\mathbf{u}(\mathbf{A}, t)$$

En dérivant la relation ci-dessus, on obtient :

$$\frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial \mathbf{x}^*} = \dot{\mathbf{Q}}\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}^*} + \mathbf{Q}\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}}\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}^*} \tag{3}$$

On sait que $\mathbf{x}^* = \mathbf{c} + \mathbf{Q}\mathbf{x}$ et $\mathbf{x} = \mathbf{Q}^T(\mathbf{x}^* - \mathbf{c})$, d'où on a :

$$\frac{\partial \mathbf{x}^*}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{Q} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}^*} = \mathbf{Q}^T$$

En remplaçant ceci dans l'équation (3), on obtient :

$$\frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial \mathbf{x}^*} = \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^T + \mathbf{Q}\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}}\right)\mathbf{Q}^T \tag{4}$$

Et, en sachant que $(AB)^T = B^T A^T$, on a également :

$$\left(\frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial \mathbf{x}^*}\right)^T = \mathbf{Q}\dot{\mathbf{Q}}^T + \left(\mathbf{Q}\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{Q}^T\right)^T = \mathbf{Q}\dot{\mathbf{Q}}^T + \mathbf{Q}\left(\mathbf{Q}\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}}\right)^T = \mathbf{Q}\dot{\mathbf{Q}}^T + \mathbf{Q}\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}}\right)^T\mathbf{Q}^T \tag{5}$$

En remplaçant les résultats (4) et (5) dans l'expression de la dérivée d'Oldroyd, on obtient :

$$\begin{aligned}
&\frac{D\sigma^*}{Dt} - \nabla^*\mathbf{u}^*\sigma^* - \sigma^*(\nabla^*\mathbf{u}^*)^T \\
&= \frac{D}{Dt}(\mathbf{Q}\sigma\mathbf{Q}^T) - (\dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^T + \mathbf{Q}\nabla\mathbf{u}\mathbf{Q}^T)\mathbf{Q}\sigma\mathbf{Q}^T - \mathbf{Q}\sigma\mathbf{Q}^T(\mathbf{Q}\dot{\mathbf{Q}}^T + \mathbf{Q}\nabla\mathbf{u}^T\mathbf{Q}^T) \\
&= \dot{\mathbf{Q}}\sigma\mathbf{Q}^T + \mathbf{Q}\frac{D\sigma}{Dt}\mathbf{Q}^T + \mathbf{Q}\sigma\dot{\mathbf{Q}}^T - \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^T\mathbf{Q}\sigma\mathbf{Q}^T - \mathbf{Q}\nabla\mathbf{u}\sigma\mathbf{Q}^T - \mathbf{Q}\sigma\mathbf{Q}^T\mathbf{Q}\dot{\mathbf{Q}}^T - \mathbf{Q}\sigma\nabla\mathbf{u}^T\mathbf{Q}^T \\
&= \mathbf{Q}\left(\frac{D\sigma}{Dt} - \nabla\mathbf{u}\sigma - \sigma\nabla\mathbf{u}^T\right)\mathbf{Q}^T
\end{aligned}$$